ISSN: 2181-404X

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ

ТАДҚИҚОТЛАР

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ * EXPERIMENTAL STUDIES

2-СОН

ФЕВРАЛЬ, 2023

IMFAKTOR PAGES

ISSN: 2181-404X
DOI Journal 10.56017/2181-404X

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР ЖУРНАЛИ

I-ЖИЛД, 2-СОН

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ТОМ-I, НОМЕР-2

JOURNAL OF EXPERIMENTAL STUDIES

VOLUME-I, ISSUE-2

ТОШКЕНТ – 2023

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР ЖУРНАЛИ

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ | JOURNAL OF EXPERIMENTAL STUDIES

№ 2 (2023) DOI http://dx.doi.org/10.56017/2181-404X-2023-2

“**Экспериментал тадқиқотлар**” илмий-амалий журнали 2022 йил 22 декабрь куни **№ 054835**-сонли гувоҳнома билан оммавий ахборот воситаси сифатида давлат рўйхатидан ўтказилган.

Мазкур журнал **6 та** халқаро маълумотлар базаларида индексланган бўлиб, жорий йил учун **UIF 2023 = 7.4** ***“импакт-фактор”*** кўрсатгичига эга.

Ўзбекистон Республикаси Олий таълим, фан ва инновациялар вазирлиги ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясининг 2023 йил 24 июлдаги 01-02/1199-сонли хатига мувофиқ ушбу журналда чоп этилган мақолалар **хорижий мақолалар сифатида тан олинади.**

Саҳифаловчи\Page Maker\Верстка: Абдураҳмон Хасанов

Таҳририят манзили: Тошкент шаҳар, Учтепа тумани, “Ватан” МФЙ, Чилонзор 24-мавзеси, 2/27-уй. Почта индекси 100152. Веб-сайт: www.imfaktor.uz/com

Телефон номер: +99894-410 11 55, **E-mail:** tahririyat@imfaktor.uz

ISSN: 2181-404X
www.imfaktor.uz

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР ЖУРНАЛИ

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ | JOURNAL OF EXPERIMENTAL STUDIES

Физика-математика фанлари

МИРЗАБОЕВ Йўлдашали Абдуманнонович
МУХТОРОВ Тошпўлатжон Шарифжон ўғли
АБДУҚОДИРОВ Бобомурод Анваржон ўғли
"Ижтимоий-гуманитар фанлар" кафедраси ўқитувчилари,
Фарғона давлат университети
https://doi.org/10.5281/zenodo.7623650

ЮКЛАНГАН АРАЛАШ ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

АНОТАЦИЯ

Аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган юкланган аралаш параболик тенглама учун бир интеграл шартли масаланинг бир қийматли ечилиши тадқиқ қилинади.

Калит сўзлар: иккинчи тартибли, ярим полоса, юкланган, перпендикуляр, чегараланган, мавжуд, ягона, интегродифференциал.

ИНТЕГРАЛЬНАЯ УСЛОВНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИЯ

Краевые задачи для смешанных параболических уравнений исследовано однозначное решение интегральной условной задачи для нагруженного смешанного параболического уравнения с перпендикулярными направлениями времени.

Ключевые слова: второго порядка, половина полосы, нагруженная, перпендикуляр, ограниченная, существует, единственный, интегродиффкренсиальный.

AN INTEGRAL CONDITIONAL PROBLEM FOR THE UPLOADED MIXED PARABOLIC EQUATION

ANNOTATION

Boundary Value Problems for mixed Parabolic Equations A unique solution of an integral conditional problem for a loaded mixed parabolic equation with perpendicular time directions is studied.

Key words: second order, half a strip, loaded, perpendicular, limited, exist, the only one, integro-differential.

D орқали $y=0$, $y=h$ va $x=-T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган ярим полосани белгилайлик, бу ерда $h=const>0$, $T=const>0$. Бу соҳада қуйидаги юкланган тенгламани қарайлик:

$$0=Lu\equiv\begin{cases}L_1u\equiv u_{xx}-u_y+\lambda\dfrac{d}{dy}u(0,y), & (x,y)\in D_1=D\cap(x>0),\\ L_2u\equiv u_{yy}+u_x, & (x,y)\in D_2=D\cap(x<0),\end{cases}$$

бу ерда λ – берилган ҳақиқий сон.

$Lu=0$ – D соҳада аралаш параболик тенглама бўлиб, D_1 соҳада тўғри параболик, D_2 соҳада эса тескари параболикдир. Аралаш параболик тенгламалар учун чегаравий масалалар биринчи бўлиб француз математиги Марио Жевре [1] томонидан ўрганилган. Кейинчалик, тадқиқотчилар томонидан аралаш параболик тенгламалар учун локал ва нолокал масалалар ўрганишга бўлган қизиқиш ортди. Жумладан, [2] ишда вақт йўналишлари алмашинувчи аралаш параболик тенглама учун Жевре масаласи тадқиқ қилинган бўлса, [3] ишда аралаш параболик тенглама учун турли локал ва нолокал шартли масалалар қўйилган ва ўрганилган. А.М.Нахушевнинг [4] иши эса характеристик формалари ўзгарувчи иккинчи тартибли параболик тенгламалар учун коррект масалалар қўйиш ва масалалар кооректлиги учун зарурий ва этарли шартлар аниқлашга бағишланган.

Дастлаб, тадқиқотчилар томонидан иккинчи тартибли аралаш параболик тенгламалар қаралган бўлса, кейинчалик юқори тартибли тенгламалар учун масалалар тадқиқоти Т.Д.Джураев [5], Д.Аманов [6], С.В. Попов [7] ва уларнинг шогирдлари томонидан ривожлантирилди.

Сўнги вақтларда тадқиқотчилар томонидан каср тартибли дифференциал операторларни ўз ичига олувчи аралаш параболик тенгламалар учун ҳам тадқиқотлар олиб борилмоқда. Жумладан, [8] ишда иккинчи тартибли аралаш параболик тенглама учун Жевре масаласи ўрганилган бўлса, [9] ишда тўртинчи тартибли аралаш параболик тенглама учун масалалар спектрал анализ усули билан тадқиқ қилинган.

Юқоридаги ишларда қаралаётган тенгламаларнинг вақт йўналишлари коллинеар бўлиб, вақт йўналишлари коллинеар бўлмаган аралаш параболик тенгламалар учун масалалар кам ўрганилган [10] ишда вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган аралаш параболик тенглама учун нолокал шартли масалалар тадқиқ қилинган бўлса, [11] ишда каср тартибли дифференциал операторларни ўз ичига олувчи аралаш параболик тенгламалар учун турли нолокал шартли масалалар ўрганилган.

Мазкур мақолада вақт йўналишлари перпендикуляр бўлган юкланган аралаш параболик тенглама учун бир интеграл шартли масаланинг бир қийматли ечилиши тадқиқ қилинади.

1-масала. D соҳанинг ёпиғида аниқланган, узлуксиз ва чегараланган шундай $u(x,y)$ функция топилсинки, у D_1 va D_2 соҳаларда мос равишда $L_1u=0$ va $L_2u=0$ тенгламаларни ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$\lim_{x\to-0}u_x(x,y)=\lim_{x\to+0}u_x(x,y),\qquad 0<y<h;$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\qquad 0\le x<+\infty; \tag{1}$$

$$u(x,0)=\varphi_2(x),\qquad -T\le x\le 0\ ; \tag{2}$$

$$u(x,h)=a(x)\int_0^h u(x,y)dy+\varphi_3(x),\qquad -T\le x\le 0, \tag{3}$$

бу ерда $a(x)$ va $\varphi_j(x),\ j=\overline{1,3}$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi_1(0)=\varphi_2(0)$.

Қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягоналигини исботлаймиз. масаланнг $u(x,y)$ ечими мавжуд бўлсин деб фараз қилайлик Масала шартларига асосланиб,

$$u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y)\ , \qquad 0\le y\le h; \tag{4}$$

$$\lim_{x\to -0} u_x(x,y)=\lim_{x\to +0} u_x(x,y)=\nu(y), \qquad 0<y<h \tag{5}$$

белгилашларни киритайлик.

Маълумки, $L_1u=0$ тенгламанинг D_1 соҳанинг ёпиғида аниқланган, узлуксиз, чегараланган ҳамда (1) va $\lim_{x\to +0} u_x(x,y)=\nu(y)$, $0\le y\le h$ шартларни қаноатлантирувчи ечими қуйидаги кўринишда аниқланади [7]:

$$u(x,y)=\int_0^{+\infty}\varphi_1(\xi)G(x;\xi,y)d\xi-\int_0^y \nu(\eta)G(x,0,y-\eta)d\eta+ \\ +\lambda\int_0^y\int_0^{+\infty}\tau'(\eta)G(x,\xi,y-\eta)d\xi d\eta \tag{6}$$

бу ерда

$$G(x,\xi,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y}}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right]+\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4y}\right]\right\}.$$

(6) формулада $x\to +0$ da лимитга ўтамиз. У ҳолда

$$\int_0^{+\infty} G(0;\xi,y-\eta)d\xi=1$$

тенгликни эътиборга олган ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\tau(y)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y \nu(\eta)(y-\eta)^{-1/2}d\eta+\int_0^{+\infty}G(0;\xi,y)\varphi_1(\xi)d\xi+\lambda\int_0^y\tau'(\eta)d\eta\,. \tag{7}$$

(7) тенгликни каср тартибли интеграл оператор кўринишидан [ ] фойдаланиб ва $\tau(0)=\varphi_1(0)$ эканлигини эътиборга олиб, қуйидагича ёзиб оламиз:

$$(1-\lambda)\tau(y)=-D_{0y}^{-1/2}\nu(y)+F(y), \tag{8}$$

бу ерда $F(y)=\int_0^{+\infty}G(0,\xi,y)\varphi_1(\xi)d\xi-\lambda\varphi_1(0)$.

(8) тенгликнинг ҳар икки томонига $D_{0y}^{1/2}$ дифференциал операторни татбиқ қилсак ва $D_{0y}^{1/2}D_{0y}^{-1/2}g(y)=g(y)$ формулани эътиборга олсак[ ], ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$\nu(y)=-(1-\lambda)D_{0y}^{1/2}\tau(y)+D_{0y}^{1/2}F(y)\ . \tag{9}$$

(9) – номаълум $\tau(y)$ va $\nu(y)$ функциялар орасидаги D_1 соҳадан олинган функционал муносабатдир.

Энди масала шартларини ва (4),(5) белгилашларни ҳисобга олиб, $L_2u=0$ тенглама ва (2), (3) шартларда x ни нолга интилтирамиз. Натижада

$$\tau''(y)+\nu(y)=0,\quad 0<y<h \tag{10}$$

тенглама ва қуйидаги шартларга эга бўламиз:

$$\tau(0)=\varphi_1(0), \qquad \tau(h)=a(0)\int_0^h \tau(y)dy+\varphi_3(0). \tag{11}$$

(9) тенгликни эътиборга олсак, (10) тенгликдан $\tau(y)$ номаълум функцияга нисбатан

$$\tau''(y)=\frac{1-\lambda}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dy}\int_0^y (y-t)^{-1/2}\tau(t)dt+\Phi_1(y) \tag{12}$$

кўринишдаги интегродифференциал тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$\Phi_1(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dy}\int_0^y (y-t)^{-1/2}\Phi(t)dt.$$

Шундай қилиб қўйилган масала (12) тенгламанинг (11) шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига эквивалент ечимга эга бўлиш маъносида келтирилди.

Агар $\{(11),\ (10)\}$ масаладан $\tau(y)$ ни бир қийматли аниқласак, у холда $\nu(y)$ функция (9) тенглик билан аниқланади. Шундан сўнг масаланинг ечими D_1 сохада (6) формула билан D_2 сохада эса $L_2u=0$ тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида аниқланади.

Шунинг учун бундан буён $\{(11),\ (10)\}$ масаланинг бир қийматли эчилишини тадқиқ қиламиз. (10) тенгламанинг умумий ечимини топиш мақсадида ундаги y ни z билан алмаштирамиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликни z бўйича $[0,y]$ оралиқда икки марта интеграллаймиз. Натижада, $\tau(0)=\varphi_1(0)$эканини эътиборга олиб, $\tau(y)$ функцияга нисбатан қуйидаги интеграл тенгламага эга бўламиз,

$$\tau(y)=\int_0^y (y-t)\Phi_1(t)dt+cy+\varphi_1(0) \tag{13}$$

чегаравий шартлар келиб чиқади, бу ерда $\Phi_1(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{d}{dy}\int_0^y (y-t)^{-1/2}\Phi(t)dt$.

(12) формула бўйича $\tau(h)$ va $\int_0^h \tau(y)dy$ ларни ҳисоблаймиз:

$$\tau(h)=\int_0^h (h-t)\Phi_1(t)dt+hc+\varphi_1(0),$$

$$\int_0^h \tau(y)dy=\int_0^h \frac{(h-t)^2}{2}\Phi_1(t)dt+\frac{h^2c}{2}+\varphi_1(0)\cdot h.$$

Буларни (10) шартларнинг иккинчисига қўйиб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$hC\left(a(0)\frac{h}{2}-1\right)=\int_0^h (h-t)\Phi_1(t)dt-a(0)\int_0^h \frac{(h-t)^2}{2}\Phi_1(t)dt+\left(1-a(0)h\right)\varphi_1(0)-\varphi_3(0) \tag{13}$$

Агар $a(0)$ ва h сонлар учун қуйидаги тенгсизлик

$$a(0)\frac{h}{2}-1\neq 0 \tag{14}$$

бажарилган бўлса, (13) тенгликдан номаълум сон бир қийматли топилади.

Агар (11) тенгламада $\lambda\neq-1$бўлса:

{(10),(11)}-(10) оддий дифференциал тенглама учун интеграл шартли масаладир. Бу масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаймиз. (10) тенгламанинг умумий ечимини топиш мақсадида ундаги y ни z билан алмаштирамиз.

Сўнгра ҳосил бўлган тенгликни z бўйича $[0, y]$ оралиқда икки марта интеграллаймиз. Натижада, $\tau(0)=\varphi_1(0)$эканини эътиборга олиб, $\tau(y)$ функцияга нисбатан қуйидаги интеграл тенгламага эга бўламиз,

$$\tau(y)-\frac{2(1+\lambda)}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^y \tau(y)(y-t)^{-1/2}\,dt=f(y)+Cy,\qquad 0\le y\le h.$$

бу ерда C -ихтиёрий ўзгармас сон, $f(y)=\int_0^y \Phi_1(t)(y-t)\,dt+\frac{4}{3}\sqrt{\frac{y^3}{\pi}}$.

Маълумки, бу интеграл тенгламанинг ечими

$$\tau(y)=\frac{d}{dy}\int_0^y E_{3/2,1}\left[(1+\lambda)(y-t)^{3/2}\right]\left[f(t)+ct\right]dt \tag{15}$$

формула билан аниқланади [9], бу ерда $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ -Миттаг-Леффлер функцияси [9], $\Gamma(z)$ эса Эйлернинг гамма функцияси [8].

(12) тенгликда дифференциаллаш амалини бажариб ва

$$E_{3/2,1}(0)=1,\quad \frac{d}{dy}E_{3/2,1}\left[(y-t)^{3/2}\right]=-\frac{d}{dt}E_{3/2,1}\left[(y-t)^{3/2}\right],$$

$$\int_0^y E_{3/2,1}\left[(y-t)^{3/2}\right]dt=y\,E_{3/2,2}\left(y^{3/2}\right),\qquad f(0)=0$$

тенгликларни эътиборга олиб, $\tau(y)$ни қуйидаги кўринишда топамиз:

$$\tau(y)=CyE_{3/2,2}\left[(1+\lambda)y^{3/2}\right]+\int_0^y E_{3/2,1}\left[(1+\lambda)(y-t)^{3/2}\right]f'(t)\,dt. \tag{16}$$

(13) формула бўйича $\tau(h)$ va $\int_0^h \tau(y)\,dy$ ларни ҳисоблаймиз:

$$\tau(h)=C\,h\,E_{3/2,2}\left((1+\lambda)h^{3/2}\right)+\int_0^h E_{3/2,1}\left[(1+\lambda)(h-t)^{3/2}\right]f'(t)\,dt\ ,$$

$$\int_0^h \tau(y)\,dy=Ch^2\,E_{3/2,3}\left((1+\lambda)h^{3/2}\right)+\int_0^h E_{3/2,2}\left[\left((1+\lambda)h-t\right)^{3/2}\right](h-t)\,f'(t)\,dt.$$

Буларни (11) шартларнинг иккинчисига қўйиб, қуйидаги тенгликка келамиз:

$$C\cdot h\left[E_{3/2,2}\left((1+\lambda)h^{3/2}\right)-a(0)h\,E_{3/2,3}\left((1+\lambda)h^{3/2}\right)\right]=$$

$$=a(0)\int_0^h E_{3/2,2}\left[(1+\lambda)\left(h-t^{3/2}\right)\right](h-t)\,f'(t)\,dt-\int_0^h E_{3/2,1}\left[(1+\lambda)(h-t)^{3/2}\right]f'(t)\,dt+\varphi_3(0).$$

Агар $a(0)$ ва h сонлар учун қуйидаги тенгсизлик

$$E_{3/2,2}\left((1+\lambda)h^{3/2}\right)-a(0)hE_{3/2,3}\left((1+\lambda)h^{3/2}\right)\ne 0 \tag{18}$$

бажарилган бўлса, (17) тенгликдан C номаълум сон бир қийматли топилади.

1-изоҳ. Масалан, $a(0)h\le 2$ бўлганда (16) тенгсизлик бажарилади.

$\tilde{N}$ номаълумнинг (14) тенгликдан топилган қийматини (13) га қўйиб, {(10),(11)} масаланинг ечими бўлган $\tau(y)$ функцияни тўлиғича аниқлаймиз.

$\tau(y)$ функция топилгандан сўнг $\nu(y)$ функция (8) тенглик билан аниқланади.

Шундан сўнг I масаланинг ечими D_1 соҳада (6) формула билан топилади, D_2 соҳада эса $L_2 u = 0$ тенгламанинг (2),(3) va $u(0,y) = \tau(y), 0 \le y \le h$ шартларни қаноатлантирувчи ечими сифатида топилади. Охирги масалани деб белгилаймиз ва бир қийматли эчилишини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, $u(x,y) - I_0$ масаланинг ечими бўлсин. $u(x,h) = \varphi(x), -T \le x \le 0$ белгилаш киритайлик. У ҳолда, $u(x,y)$ функцияни соҳада тенглама учун биринчи чегаравий масаланинг ечими сифатида

$$u(x,y) = \int_0^1 \tau(\eta) G(0,\eta;x,y)\,d\eta + \int_x^0 \varphi_2(\xi) G_\eta(\xi,0;x,y)\,d\xi - \int_x^0 \varphi(\xi) G_\eta(\xi,h;x,y)\,d\xi$$

(17)

кўринишда ёзиш мумкин бўлади [10] , бу ерда

$$G(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\xi - x)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y-\eta-2n)^2}{4(\xi - x)} \right] - \exp\left[-\frac{(y+\eta-2n)^2}{4(\xi - x)} \right] \right\}, \xi > x.$$

$u(x,h) = \varphi(x)$ белгилашни ва (17) формулани эътиборга олиб, (3) шартдан

$$\varphi(x) + \int_x^0 \varphi(\xi)\left[a(x) K(x,\xi)\right] d\xi = f_1(x), \qquad -T \le x \le 0 \qquad (18)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз, бу ерда

$$K(x,\xi) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi(\xi - x)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[e^{\frac{-n^2}{\xi - x}} - e^{\frac{-(2n+h)^2}{4(\xi - x)}} + e^{\frac{-(n-h)^2}{\xi - x}} - e^{\frac{-(2n-h)^2}{4(\xi - x)}} \right], \xi > x$$

$$f_1(x) = a(x) \int_0^h \left[\int_0^1 \tau(\eta) G(0,\eta;x,y)\,d\eta + \int_x^0 \varphi_2(\xi) G(\xi,0;x,y)\,d\xi \right] dy + \varphi_3(x).$$

(18) – Вольтеррнинг иккинчи тур интеграл тенгламасидир [1].Унинг ядроси $(1/2)$ тартибли суст махсусликка эга бўлиб, $x \to \xi$ da o‘zini $(x - \xi)^{-1/2}$ функция каби тутади, ўнг томони эса синфга тегишли, яъни

$$a(x) K(x,\xi) = O(1)(\xi - x)^{-1/2}, \qquad f_1(x) \in C[-T,0].$$

Шунинг учун (18) интеграл тенглама $[-T,0]$ оралиқда узлуксиз бўлган ягона ечимга эга. Демак, I_0 масала ҳам ягона ечимга эга.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема ўринли эканлиги исботланди.

Теорема. Агар $a(x) \ne 0, x \in [-T,0]$ бўлиб, $a(0)$ va h сонлар (16) тенгсизликни қаноатлантирса, I масала ягона ечимга эга бўлади.

2-изоҳ. $a(x) \equiv 0, \; x \in [-T,0]$ бўлганда ҳам I масаланинг ечими D_2 соҳада (16) формула билан аниқланади, фақат бунда $\varphi(x) = \varphi_3(x)$ деб олинади.

ИҚТИБОСЛАР

1. Gevrey M. Sur les equations aux derivees partielles du type parabolique // J. Math. Appl.1913, T.9,Sec.6.-P. 305-475.;

2. Керефов А.А. Об одной краевой задаче Жевре для параболического уравнения с знакопеременным разрывом первого рода у коэффициента при производной по времени // Дифференциальные уравнения.-Минск. 1974, Т.10, N1.-С.69-77.;

3. Акбарова М. Х . Нелокальные краевые задачи для параболических уравнений смешанного типов. Автореферат на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. –Ташкент. 1995.-17с.;

4. Уринов А.К., Маманазаров А.О. Аралаш параболик тенглама учун бир чегаравий масала ҳақида // ФДУ илмий хабарлари. 2012, N3, 44-46 бетлар.;

5. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории тепловодородности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения.-Минск. 1977, Т.11, N2.-С.294-304.;

6. Голованчиков А. Б., Симонов И. Э., Симонов Б. В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундаментальная и прикладная математика. 2001,Т.7,N2.- С. 339-349.;

7. Сопуев А., Джураев Дж. Д. Краевые задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения// Дифференциальные уравнения.-Минск.1989, Т.25,N6.-С.1009-1015.;

8. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар.-Фарғона: Фарғона нашриёти, 2011.;

9. Самко С. Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника .1987.; [10]. Джураев Т.Д. Уравнения смешанного-составного типов. –Ташкент: Фан. 1979.