ISSN: 2181-404X

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ
ТАДҚИҚОТЛАР

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ * EXPERIMENTAL STUDIES

2-СОН

ФЕВРАЛЬ, 2023

IMFAKTOR PAGES

ISSN: 2181-404X
DOI Journal 10.56017/2181-404X

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР ЖУРНАЛИ

I-ЖИЛД, 2-СОН

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ТОМ-I, НОМЕР-2

JOURNAL OF EXPERIMENTAL STUDIES

VOLUME-I, ISSUE-2

ТОШКЕНТ – 2023

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР ЖУРНАЛИ

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ | JOURNAL OF EXPERIMENTAL STUDIES

№ 2 (2023) DOI http://dx.doi.org/10.56017/2181-404X-2023-2

“**Экспериментал тадқиқотлар**” илмий-амалий журнали 2022 йил 22 декабрь куни **№ 054835**-сонли гувоҳнома билан оммавий ахборот воситаси сифатида давлат рўйхатидан ўтказилган.

Мазкур журнал **6 та** халқаро маълумотлар базаларида индексланган бўлиб, жорий йил учун **UIF 2023 = 7.4** ***“импакт-фактор”*** кўрсатгичига эга.

Ўзбекистон Республикаси Олий таълим, фан ва инновациялар вазирлиги ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясининг 2023 йил 24 июлдаги 01-02/1199-сонли хатига мувофиқ ушбу журналда чоп этилган мақолалар **хорижий мақолалар сифатида тан олинади.**

Саҳифаловчи\Page Maker\Верстка: Абдураҳмон Хасанов

Таҳририят манзили: Тошкент шаҳар, Учтепа тумани, “Ватан” МФЙ, Чилонзор 24-мавзеси, 2/27-уй. Почта индекси 100152. Веб-сайт: www.imfaktor.uz/com

Телефон номер: +99894-410 11 55, **E-mail:** tahririyat@imfaktor.uz

ISSN: 2181-404X
www.imfaktor.uz

ЭКСПЕРИМЕНТАЛ ТАДҚИҚОТЛАР ЖУРНАЛИ

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ | JOURNAL OF EXPERIMENTAL STUDIES

Физика-математика фанлари

РАИМОВ Холбек Кадирович
Гулистон давлат педагогика институти
“Аниқ ва табиий фанлар” кафедраси ўқитувчси

ХУДОЁРОВА Нигора Баходир қизи
ЁҚУБОВ Муҳаммад Абдурахмон ўғли
Гулистон давлат педагогика институти

ЧИЗИҚЛИ ГАРМОНИК ОССИЛЯТОР УЧУН ШРЕДИНГЕР ТЕНГЛАМАСИНИ ЕЧИМЛАРИ ВА УНИНГ ИККИЛАМЧИ КВАНТЛАНИШНИНГ БАЪЗИ КОММУТАЦИОН МУНОСАБАТЛАРИГА ТАТБИҚЛАРИ

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада квант гармоник осциллятор масаласига ўзгача ёндашув келтирилган бўлиб, формулаларни келтириб чиқаришда дифференциал тенгламалар назаряси, махсус функциялар назаряси ва қаторлар назарясидан фойдаланган ҳолда илмий адабиётларда келтирилиб чиқарилиши кўрсатилмаган баъзи фармулалар батафсил чиқариб исботланган. Бу ёш физикларни айнан шу мавзуни тушунишларига ёрдам беради деган умиддаман.

Калит сўзлар: квант гормоник отсилятор, тўлқин функция, эҳимоллик зичлиги, Эрмит полином, Пуассон интеграли, пайдо қилиш ва йўқ қилиш операторлари даражали қаторлар.

АННОТАЦИЯ

В статье описан неординарный подход к вопросу квантового гармонического осциллятора, использование при выведении формул теории дифференциальных уравнений, теории специальных функций и теории рядов. Автор, используя научную литературу показал не полностью раскрытые формулы. Надеюсь статья поможет молодым физикам глубоко понять данную тему.

Ключевые слова: квантовый гармонический осциллятор, волновая функция, плотность вероятности, полиномы Эрмита, Интеграл Пуассона, операторы рождения и уничтожения, степенные ряды.

ANNOTATION

The article describes an extraordinary approach to the question of quantum harmonic oscillator, the use of the theory of differential equations, the theory of special functions and series theory in deriving formulas. The author using scientific literature showed incompletely disclosed formulas. I hope the article will help young physicists to deeply understand this topic.

Key words: quantum oscillator, wave function, probability density, Hermite polynomials, Integral Poisson, creation and annihilation operators, power series.

Мувозанат ҳолати атрофида квазиэластик куч таъсирида тебранма ҳаракат қилувчи системага гармоник осциллятор дейилади. Гармони оссилятор даврий ҳаракатнинг муҳим намунаси деб ҳисоблаш мумкин.

Квант механикаси нуқтаи назаридан чизиқли гармоник осциллятор масаласи бор назарясига асосланиб ҳам ечилган, унга асосан осциллятор энергияси квантланган бўлади ҳамда дискрет қийматларни олади. Осциллятор томонидан электромагнит тўлқинларни нурлатилиши квантлашган бўлиши кераклигини М. Планк таклиф этиб, нурланиш назарясини яратган эди.

Гармоник осциллятор учун Шредингер тенгламасини келтрилиб чиқарилиши ва унинг ечимлари

Квант механикасида чизиқли гармони осциллятор қуйидаги формула билан аниқланувчи потенциал чуқурлик ичида ҳаракат қилади [1, Б.145,2, Б.47, 4, Б.121].

$$U = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{1}$$

Агар заррача мувозанат нуқта атрофида кичик тебранма ҳаракатланмоқда деб фараз қилсак, потенциял энергияни аниқловчи ҳад содда коринишни олади [4,Б.121]

Квант механикасида бир ўлчамли гармоник осциллятор деб Гамилтон оператори билан аниқланувчи системага айтилади [3,Б.91, 5,Б.239].

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} \quad . \tag{2}$$

Квант механикасида гармоник осциллятор масаласи параболик потенциал чуқурликда ҳаракатланувчи заррача сифатида кўриб чиқилади яъни, системани энергетик спектрини аниқлаш ва шунга мос тўлқин функцияларини топишга қаратилади. Бошқача сўз билан айтганда $\hat{H}$ операторни ҳусусий қиймат ва шунга мос ҳусусий функцияларини топишдан иборат. Бу эса Шредингер тенгламасини ечиш билан бажарилади[2,Б.47].

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{3}$$

(2) тенгламадаги импульс ўрнига импульс операторини $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ қўйиб Шредингер тенгламасини ёзамиз:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi = E\psi \tag{4}$$

Бу тенгламани ечишда қулайлик бўлиши учун ўлчамсиз катталикларга ўтиб оламиз яъни:

$$x = \xi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega} \tag{5}$$

қуйидаги ҳисобларни бажариб:

$$dx = d\,\xi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,, \qquad \frac{dx}{d\xi} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

топамиз. Шундан сўнг мураккаб функцияни дифференциаллаш қоидаси(занжир қоидаси)дан фойдаланиб топамиз:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d\psi}{d\xi}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d\psi}{d\xi}\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{d\xi}\right) = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}$$

каби алмаштиришларни бажариб, (4) тенгламани мос ҳадлари ўрнига олинган натижаларни қўямиз:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{m\omega^2}{2}\xi^2\frac{\hbar}{m\omega}\ \ \psi=E\psi$$

бир хил ҳадларини қисқартириб қуйидаги кўринишдаги тенгламани оламиз:

$$-\frac{\hbar\omega}{2}\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\frac{\hbar\omega}{2}\xi^2\ \ \psi=E\psi$$

ҳосил бўлган тенгламани $2/\hbar\omega$ га кўпайтирсак

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\xi^2\ \ \psi=\varepsilon\psi$$

ҳосил қиламиз [2,Б.47].

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}+\left(\varepsilon-\xi^2\right)\psi=0 \qquad (6)$$

(6) тенглама Шредингер тенгламаси ўлчамсизлантирилган кўриниши бўлиб, биз масалани ечишда юқоридаги формуладан фойдаланамиз.

Бу масалани ўзига хос томони шундан иборатки, заррачанинг ҳаракати ўтиб бўлмас девор билан чегараланмаган. Шунинг учун осцилляторга чегаравий шартлар қўйилмаган фақат, тўлқин функцияга квадратик интегралланувчанлик шарти бажарилишлиги талаб қилинади.

Юқоридаги ҳосил қилинган (6) тенгламани ечимини умумий характерлаш учун ξ ? ε бўлганида $\psi\left(\xi\right)$ тўлқин функциянинг асимптотик ўзгаришини кўрамиз. Юқоридаги млоҳазалардан сўнг қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2}-\xi^2\ \ \psi=0\ , \qquad (7)$$

ξ нинг катта қийматларида (7) тенгламани асимптотик ечими $\psi=e^{\mathrm{m}\frac{\xi^2}{2}}$ кўринишда бўлади[1]. Шредингер тенгламаси ечимига қўйилган умумий шартларни қаноатлантириши учун ортиб борувчи ечимларни ташлаб юбориш керак. Яъни x ортганда (демак, $\xi\to\infty$) тўлқин функция $\psi\to 0$ бўлиши керак [1,Б.146,2,Б,48, 4, Б.122]. Шундагина ечим физик маънога эга бўлади.

Шредингер тенгламасини асимтотик кўринишидаги ечимлари тўпламидан фақат $\psi=e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ кўринишдагиси физик жиҳатида биз учун қизиқ. Шуниг учун (6) тенгламани ечимини

$$\psi\left(\xi\right)=e^{-\frac{\xi^2}{2}}h\left(\xi\right)\qquad , \qquad (8)$$

кўринишда қидирамиз (8) формуладан мос биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни олайлик

$$\frac{d\psi}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\frac{\xi^2}{2}}h\left(\xi\right)\right)=\frac{dh\left(\xi\right)}{d\xi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}-h\left(\xi\right)\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$-\frac{dh\left(\xi\right)}{d\xi}\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}-\frac{dh\left(\xi\right)}{d\xi}\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}+h\left(\xi\right)\xi^2 e^{-\frac{\xi^2}{2}}-h\left(\xi\right)e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

олинган ҳосилаларни (6) тенгламадаги мос ўринларига қўйсак, қуйидагини оламиз:

$$\frac{d^2h\left(\xi\right)}{d\xi^2}-2\frac{dh\left(\xi\right)}{d\xi}\xi+\left(\varepsilon-1\right)h\left(\xi\right)=0, \qquad (9)$$

олинган (9) дифференциал тенгламани ечимини даражали қатор кўринишида қидирамиз [6,Б.298, 7,Б.127]:

$$h(\xi)=a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+a_3\xi^3+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j$$

$$\frac{dh(\xi)}{d\xi}=a_1+2a_2\xi+3a_3\xi^2+\ldots=\sum_{j=1}^{\infty}ja_j\xi^{j-1}$$

$$\frac{d^2h(\xi)}{d\xi^2}=2a_2+6a_3\xi+\ldots=\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_j\xi^{j-2}$$

Даражали қатордан олинган ҳосилаларни (9) тенгламага қўйиб,

$$\sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)a_j\xi^{j-2}-2\xi\sum_{j=1}^{\infty}ja_j\xi^{j-1}+(\varepsilon-1)\sum_{j=1}^{\infty}a_j\xi^j=0, \tag{10}$$

(10) формулани оламиз. Формулага эътибор берадиган бўлсак, ξ нинг даражалари ва сумма тартиби ҳар хил. Бу тенгламани соддароқ кўринишга келтириш учун ξ нинг даражаларини бир хил кўринишга келтириамиз, бунинг учун қаторлар назарясидаги айрим қоидаларни билиш кифоя яъни, қатор кўрсаткичини силжитиш қоидасини:

$$\sum_{j=1}^{\infty}2ja_j\xi^j=\sum_{j=0}^{\infty}2ja_j\xi^j.$$

Исбот:

$$\sum_{j=1}^{\infty}2ja_j\xi^j=2\cdot 1a_1\xi^1+2\cdot 2a_2\xi^2+\ldots$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}2ja_j\xi^j=\underbrace{2\cdot 0a_0\xi^0}_{0}+2\cdot 1a_1\xi^1+2\cdot 2a_2\xi^2+\ldots$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}a_n(x-x_0)^{n+k}=\sum_{n=n_0+k}^{\infty}a_{n-k}(x-x_0)^n$$

Юқоридаги формуладан фойдалангандан сўнг, натижавий тенгламага келади:

$$(j+2)(j+1)a_{j+2}\xi^j-\sum_{j=0}^{\infty}2ja_j\xi^j+(\varepsilon-1)\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left[(j+2)(j+1)a_{j+2}-2ja_j+(\varepsilon-1)a_j\right]\xi^j=0 \tag{11}$$

$$(j+2)(j+1)a_{j+2}-2ja_j+(\varepsilon-1)a_j=(j+2)(j+1)a_{j+2}-(2j-\varepsilon+1)a_j=0$$

$$a_{j+2}=\frac{2j-\varepsilon+1}{(j+2)(j+1)}a_j \tag{12}$$

Шредингер тенгламасини ечими чекли бўлиши керак лекин $h(\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\xi^j$ қатор эса чексиз давом эттириш мумкин. Бунинг учун қаторни қандайдир ҳадидан бошлаб юқори тартибли коэффитсиэнтлари нолга тенг бўлсин деб шарт қўямиз, шунда $j=n$ тартибли кўпҳад ҳосил бўлади. Бу кўпҳад биз ҳосил қилган тенгламани қаноатлантирувчи бўлиб физик маъно касб этади. У ҳолда $a_n=0,\ a_{n+2}=0$ бўлсин

$$2n-\varepsilon+1=0,$$

бўлади[1,Б148,2,Б.48].

Юқоридаги мулоҳазалар ўринли бўлиши учун қуйидаги шарт бажарилиши керак яъни:

$$\varepsilon_n=2n+1, \tag{13}$$

ε қийматни ε_n ga қўйиб биз учун муҳим бўлган гармоник осциллятор энергиясини ифодаловчи формулани оламиз [2,Б.48,5,Б.240]:

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}(2n+1). \tag{14}$$

Бу ерда $n = 0,1,2,3,\ldots$ - квант сонлар. Юқорида олинган формула гармоник осциллятор учун $\hat{H}$ Гамилтон операторининг хусусий қийматларини олиш имкониятини беради яъни [1,Б148,6,Б241]:

$n = 0$ бўлганида $E_0 = \hbar\omega/2$

$n = 1$бўлганида $E_1 = 3\hbar\omega/2$

Навбатдаги масала Гамилтон оператори ҳусусий қийматларига мос ҳусусий функцияларини топиш зарур. Қўзғалган чи тартибли ҳолат учун ҳусусий функцияни кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\psi_n(\xi) = A_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} h(\xi) \tag{15}$$

билан аниқланади. Бу ерда A_n-нормаллаштириш шарти билани аниқланадиган катталик, $h(\xi)$ ҳад n даражали кўп ҳад бўлиб унинг коэффитсиэнтлари (12) формула билан аниқланади, $h(\xi)$нинг кўриниши

$$h_n = H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \tag{16}$$

$H_n(\xi)$Эрмит-Чебешев полиноми бўлиб унинг хусусиятлари махсус функциялар назарясидан бизга маълум.

Квант механикасида тўлқин функцияга бир нечта талаблар қўйилади яъни узлуксизлик, бир қийматлийлик ва квадратик интегралланувчи бўлиши зарар ва этарлидир [1,Б.44,2,Б20,6,Б.84]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n d\xi = 1 \tag{17}$$

бўлиши керак. (17) шарт бажарилишни исботлайлик бунда (15) ифодани (17)га қўямиз:

$$A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi = (-1)^n A^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

Юқоридаги ифодани бўлаклаб интеграллаймиз:

$$K = (-1)^n A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi = \begin{bmatrix} H_n(\xi) = u & du = \dfrac{dH_n(\xi)}{d\xi} \\ dv = \dfrac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} d\xi & v = \dfrac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^n A_n^2 H_n(\xi) \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2}}_{nol} d\xi + (-1)^{n-1} A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} e^{-\xi^2} \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} d\xi$$

биринчи ҳад нолга тенг. Бўлаклаб интеграллаш қоидасини н марта такрорлаб қуйидагини оламиз:

$$K = A_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} d\xi \tag{18}$$

юқоридаги интеграл белгиси остида турган $H_n(\xi)$ Эрмит-Чебешев полиномидан н тартибли

ҳосила олинса [5,Б.52]:
$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n! \tag{19}$$

га тенг бўлади, (19) натижани (18) интегралга қўйсак юқоридаги интеграл содда кўринишни

олади: $K = A_n^2 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$

Интеграл остидаги турган ифода Пуассон интеграли бўлиб унинг кўриниши қуйидагича

бўлади:
$$\boldsymbol{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi} \tag{20}$$

Пуассон интегралидан фойдаланиб (20) ни (18)га қўйиб топамиз:
$$K = A_n^2 2^n n! \sqrt{\pi} \tag{21}$$

нормаллаштириш шартига мувофиқ (21) формула қуйидагига тенг бўлиши керак:
$$A_n^2 2^n n! \sqrt{\pi} = 1 \tag{22}$$

у ҳолда, (22) шартдан нормаллашган кўпайтувчини топамиз:
$$A_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \tag{23}$$

ҳосил қилинган (23) формулани (15) га қўйсак биз учун муҳим бўлган тўлқин функциянинг натижавий кўринишини оламиз:
$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n ! \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi) \tag{24}$$

бир қанча аниқланган натижавий формулани тасаввур қилиш учун n нинг бир қанча қийматларига мос келадиган хусусий энергиялари ва хусусий функциялар қуйидаги кўринишда бўлишини кўриш мумкун:

$$n = 0 \text{ da } \psi_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

$$n = 1 \text{ da } \psi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} 2\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

ва ҳакозолар.

Баъзи каммутацион муносабатларнинг исботлари.

Энди гармоник осциллятор учун олинган формулаларни иккиламчи квантланиш назаряси фойдаланган ҳолда биз биладиган тўлқин функцияни оператор деб эълон қиламиз ҳамда бир нечта янги операторларни келтирамиз. Шу ўринда квантланиш нима деган саволга жавоб бериб кетайлик, яъни физикани ихтиёрий бўлимини қарайдиган бўлсак майдонни турли катталиклар билан характерланади. Хусусан квант механикасида майдонни тўлқин функция ёрдамида ифодаланади. Майдонни ифодаловчи катталикларни оператор деб айтилади ва улар орасида каммутацион муносабат ўрнатилади.
$$\left[\hat{a}^-, \hat{a}^+\right] = 1 \tag{25}$$

$\hat{a}^- \varphi_n = \varphi_{n-1}$ йўқ қилувчи оператор, Бу формулани шундай тушуниш мумкин, йўқ қилувчи оператор бирор функцияга таъсир этганида унинг тартибини бир поғонага пасайтиради. Бу мулоҳазаларни энергетик нуқтаи назардан қарайдиган бўлсак, энергетик сатҳини бир поғона туширади.

$$\hat{a}^{+}\varphi_n = \varphi_{n+1} \text{ пайдо қилувчи оператор}$$

Пайдо қилувчи оператор ҳақида ҳам юқоридагига ўхшаш фикир юритиш мумкин яъни, маълум энергетик даражада турган заррачаларни ифодаловчи тўлқин функцияга таъсир этганида юқорироқ энергетик даражани эгаллашини кўрсатади.

Пайдо қилувчи ва йўқ қилувчи операторлар гармоник отсиляторни энергиясини ифодоловчи катталиклар билан қуйдаги кўринишда боғланган[2]:

$$\hat{a}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right), \quad \hat{a}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right) \tag{26}$$

бу ердан $\hat{x}$ vа $\hat{p}$ қуйдагига тенг:

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\hat{a}^{+} + \hat{a}^{-}\right),$$

$$\hat{p} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\omega\hbar}\left(\hat{a}^{-} - \hat{a}^{+}\right)$$

(26) муносабатга мос катталикларни ўрнига қўйиб

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{x}^2}{\frac{\hbar}{m\omega}} + \frac{\hat{p}^2}{m\omega\hbar} - \frac{i\hat{x}\hat{p}}{\hbar} + \frac{i\hat{p}\hat{x}}{\hbar} - \frac{\hat{x}^2}{\frac{\hbar}{m\omega}} - \frac{i\hat{p}\hat{x}}{\hbar} + \frac{i\hat{x}\hat{p}}{\hbar} - \frac{\hat{p}^2}{m\omega\hbar}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-i}{\hbar}\left[\hat{x}, \hat{p}\right] + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{p}, \hat{x}\right]\right) = 1$$

Бу эрда $\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i\hbar$ га тенг буни исботлаш қийин эмас, яъни:

$$\left[\hat{x}, \hat{p}\right]\psi = \left(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}\right)\psi = \hat{x}\left(\hat{p}\psi\right) - \hat{p}\left(\hat{x}\psi\right) = \hat{x}\left(-i\hbar\frac{d}{dx}\psi\right) + i\hbar\frac{d}{dx}\left(\hat{x}\psi\right) =$$

$$= -i\hbar\left(x\frac{d\psi}{dx} - \psi - x\frac{d\psi}{dx}\right) = i\hbar\psi$$

$$\hat{N} = \hat{a}^{+}\hat{a}^{-} \tag{27}$$

Юқоридаги формула заррача сони оператори дейилади. Баъзи каммутаторларни ҳисоблайлик,

$$\left[\hat{a}^{+}, \hat{N}\right] = \left(\hat{a}^{+}\hat{a}^{+}\hat{a}^{-} - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\hat{a}^{+}\right) = \hat{a}^{+}\left(\hat{a}^{+}\hat{a}^{-} - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-} - 1\right) = -\hat{a}^{+}$$

$$\left[\hat{a}^{-}, \hat{N}\right] = \left(\hat{a}^{-}\hat{a}^{+}\hat{a}^{-} - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\hat{a}^{-}\right) = \left(\hat{a}^{-}\hat{a}^{+} - \hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\right)\hat{a}^{-} = \hat{a}^{-}$$

Бу ерда биз $[a^{-}, a^{+}] = 1$, vа $a^{-}a^{+} = 1 + a^{+}a^{-}$ эканлигидан фойдаландик.

Юқорида $\hat{x}$ ва $\hat{p}$ лар учун олинган ифодаларни $\hat{H}$ га қўйиб қаноатлантиришини исботлайлик:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} == \frac{1}{2m}\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\omega\hbar}\left(\hat{a}^{-} - \hat{a}^{+}\right)\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\hat{a}^{+} + \hat{a}^{-}\right)\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\omega\hbar\left(1+2\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\right)+\frac{1}{2}\omega\hbar\left(1+2\hat{a}^{+}\hat{a}^{-}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\omega\hbar\left(\frac{1}{2}+\hat{N}\right)+\frac{1}{2}\omega\hbar\left(\frac{1}{2}+\hat{N}\right)\right]=\omega\hbar\left(\frac{1}{2}+\hat{N}\right)$$

Демак,

$$\hat{H}=\omega\hbar\left(\frac{1}{2}+\hat{N}\right) \tag{28}$$

$\hat{N}$ операторнинг хусусиятларини кўриб чиқайлик $\hat{N}\varphi_n=n\varphi_n$ бўлсин у ҳолда, заррачалар сони оператори $\hat{N}$ ни йўқ қилиш операторига таъсирини ўрганайлик яъни,

$$\hat{N}\left(\hat{a}^{-}\varphi_n\right)=\left(\hat{a}^{-}\hat{N}-\hat{a}^{-}\hat{N}+\hat{N}\hat{a}^{-}\right)\varphi_n=\left(\hat{a}^{-}\hat{N}+\hat{N}\hat{a}^{-}-\hat{a}^{-}\hat{N}\right)\varphi_n=\left(\hat{a}^{-}\hat{N}+\left[\hat{N},\hat{a}^{-}\right]\right)\varphi_n=\hat{a}^{-}\left(\hat{N}-1\right)\varphi_n$$

Энди бизга яхши таниш бўлган операторнинг функцияга таъсири кўринишда ёзамиз:

$$\hat{a}^{-}\left(\hat{N}-1\right)\varphi_n=\hat{a}^{-}(n-1)\varphi_n=(n-1)\hat{a}^{-}\varphi_n$$

$$\hat{N}\left(\hat{a}^{-}\varphi_n\right)=(n-1)\varphi_{n-1} \tag{29}$$

Бунда қуйидаги тенглик келиб чиқади:

$$\omega\hbar\left(\hat{N}+\frac{1}{2}\right)=\omega\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \tag{30}$$

Хулоса ўрнида қуйидагиларни келтирамиз:

I. Гармоник оссилятор учун Шредингер тенгламасини келтириб чиқарилиши барча китобларда кўрсатилган бўлсада лекин, унинг математик жиҳатидан баъзи формулалари ўрганаётганлар учун келтириб чиқарилиб кўрсатилмайди. Бу мақолада масалани шу тамонлари келтирлиб ўтилган.

II. Квант механикасида каммутацион муносабатлар ҳисоблаш ва исботлашга доир масалалар кўп учраб туради бу мақоланиниг

III. Баъзи каммутаторларни исботлаш бўйича ҳисоблашлар кўрсатилган.

ИҚТИБОСЛАР

1. G‘.H.Hoshimov, R.Ya.Rasulov, N.X.Yo‘ldoshev Kvant mexanikasi asoslari-Toshkent “O‘qituvchi” 1995. 143-151 betlar
2. В.Г.Левич, Ю.А.Вдовин, В.А. Мямлин Курс теоретической физики- Том II Москва “Наука” 1971. 46-52, 197-200 бетлар
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц Квантовая Механика Том III- Москва “Наука” 1989. 91-94 бетлар
4. M.M.Musaxanov, A.S. Rahmatov, Nazariy fizika kursi Kvant mexanikasi Toshkent-2011, “Tafakkur bo‘stoni”
5. Nouredine Zettili, Quantum mechanics A John Wiley and Sons, Ltd., Publication
6. Г.М.Фихтенгольц, Курс Дифференцального и интегральногоисчисления том II Москва 1970 “Наука”
7. Н.Н.Воробьев Теория рядов- Москва “Наука” 1979. 110-122 бетлар.
8. В.С.Смирнов Курс высшей математики Том III часть вторая 558-563 бетлар.